有限集合の可算族の和は可算?

話を続けます. 引っかかっているところは, 添え字集合 I が可算で各 $i \in I$ に対して Y_i が 4 元集合, しかも互いに交わりなし, との仮定のもとで $\mathcal{Z} = \bigcup_{i \in I} [Y_i]^2$ なる 2 元集合族を考えたとして, これが可算族になる保証があるかどうかというところです. このことが保証されている, という命題を, ここでは H_4 と表記します. より一般に, 自然数 $m \geq 3$ について

$$(\mathrm{H}_m) \qquad \forall i < \omega \ (|Y_i| = m) \to \left| \bigcup_{i<\omega} [Y_i]^2 \right| \leq \omega$$

という命題を考えます.

今朝のノート（091029a.pdf）の結果はこの命題とは直接関係ありませんが, これがあるかないかで, C_n に集合族のサイズの制限をつけたものの扱いが違ってきそうです. 各自然数 $m \geq 3$ について

命題 1 $\qquad \mathrm{H}_{m+1} \to \mathrm{H}_m$

が成立します. というのも, m 元集合 Y_i に属しない新しい元 c_i を添加して $m{+}1$ 元集合 $X_i = Y_i \cup \{c_i\}$ を作れば, $[Y_i]^2 \subset [X_i]^2$ であり, H_{m+1} によって $\bigcup_{i<\omega} [X_i]^2$ が可算となるなら, その部分集合 $\bigcup_{i<\omega} [Y_i]^2$ もまた可算だからです.

次に, 可算族に制限された C_m を $\mathrm{C}_m(\aleph_0)$ と書きます:

$$(\mathrm{C}_m(\aleph_0)) \qquad \forall i < \omega \ (|Y_i| = m) \to \exists f : \omega \to \bigcup_{i<\omega} Y_i \ \forall i < \omega \ (f(i) \in Y_i).$$

実は H_m と $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ から $\mathrm{C}_m(\aleph_0)$ が導かれます. というのは, H_m と $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ が次の命題 L_m を導くからです.

$$(\mathrm{L}_m) \qquad \forall i < \omega \ (|Y_i| = m) \to \left| \bigcup_{i<\omega} Y_i \right| \leq \omega.$$

つまり全部の Y_i の和集合が可算集合で整列可能になるので, 選択関数はその整列順序にもとづいて定めればいいわけです. ですから L_m から $\mathrm{C}_m(\aleph_0)$ が導かれるのはあきらかです.

命題 2 $\qquad \mathrm{H}_m \,\&\, C_2(\aleph_0) \ \to \ \mathrm{L}_m.$

[証明] 仮定 H_m により, 2 元集合の族 $\mathcal{Z} = \bigcup_{i<\omega} [Y_i]^2$ が順序型 ω に整列できるので, その順序を $\prec$ と書こう. 仮定 $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ により 2 元集合の可算

族 $\mathcal{Z}$ からの選択関数が存在する．Y_i の要素に序列を与えるために，まず f によって代表として選出された回数を最優先にして順序づけをし，選出回数が同じものどうしは代表として最初に選出されたペアの $\prec$ による序列によって順序づけする．一見すると，この方法では一度も代表として選出されなかった要素の順序づけが確定しないように見えるが，そのような要素が高々ひとつしかないことは (選出回数ゼロの要素 2 個でペアを作れたら矛盾するので) 明らかである．そこで，選出回数最優先というルールにより，この要素は最後尾に順序付けされることになる．こうして，添え字 i によらない一様な方法で Y_i の m 個の要素に順序づけを与えることができる．こうして定まった Y_i の要素の順序づけと i の大きさにもとづいて 和集合 $\bigcup_{i<\omega} Y_i$ を順序型 ω に整列順序づけできる．(証明終)

この考察からわかることは，C_2 から C_4 を導いた今朝の論法は $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ から $\mathrm{C}_4(\aleph_0)$ を導くために用いることはできないだろう，ということです．というのも $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ から $\mathrm{C}_3(\aleph_0)$ が導かれるというのは (まだきちんと確認したわけではありませんが) ちょっとありそうもないことで，だとすれば，$\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ から H_4 を導くことも，またできそうもないからです．

しかしこのことは $\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ が $\mathrm{C}_4(\aleph_0)$ を導かないことの証明にはなっていません．$\mathrm{C}_2(\aleph_0)$ から $\mathrm{C}_4(\aleph_0)$ が出てくるというのは，$\mathrm{C}_3(\aleph_0)$ が出てくることに比較すれば，はるかに“ありそう”なことです．

(2009 年 10 月 29 日午後，藤田“てなさく”博司)