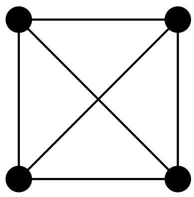
C_2 は C_4 と同値である

まず C_4 が C_2 を導くというのは簡単で, $\{ X_i \mid i \in I \}$ を2元集合の族とするとき $\{ X_i \times \{0,1\} \mid i \in I \}$ は4元集合の族であり, ここからの選択関数 $f : I \to (\bigcup_{i \in I} X_i) \times \{0,1\}$ に射影 $\langle x, y \rangle \mapsto x$ を合成すれば $\{ X_i \mid i \in I \}$ からの選択関数が得られる.

次に C_2 から C_4 を示そう. 4元集合の族 $\{Y_i \mid i \in I\}$ が与えられたとする. ここで必要とあれば $\{Y_i \mid i \in I\}$ のかわりに $\big\{ \{i\} \times Y_i \bigm| i \in I \big\}$ を考えることにより, Y_i たちが互いに交わりがないと仮定しても一般性を損なうことはない. $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$, $\mathcal{Z} = \bigcup_{i \in I} [Y_i]^2$ とおく. $\mathcal{Z}$ は2元集合の族である. 仮定 C_2 により, 選択関数 $f : \mathcal{Z} \to Y$ が得られる.

いま f の $[Y_i]^2$ $(i \in I)$ への制限写像は6個の2元集合からそれぞれ代表を選ぶ:



$$Combin(4,2) = 6.$$

選ばれる代表は Y_i の4つの要素のいずれかである. したがって, 重複して選ばれる Y_i の要素が少なくとも1個ある. 2個あるいは3個の Y_i の要素が重複して選ばれる可能性もある.

(1) 重複して選ばれる要素が1個の例:

$$\begin{gathered} f(\{a,b\}) = f(\{a,c\}) = f(\{a,d\}) = a, \\ f(\{b,c\}) = b, \\ f(\{b,d\}) = d, \\ f(\{c,d\}) = c. \end{gathered}$$

(2) 重複して選ばれる要素が2個の例:

$$\begin{gathered} f(\{a,b\}) = f(\{a,c\}) = a, \\ f(\{a,d\}) = f(\{b,d\}) = d, \\ f(\{b,c\}) = b, \\ f(\{c,d\}) = c. \end{gathered}$$

(3) 重複して選ばれる要素が 3 個の例:

$$\begin{aligned} f(\{a,b\}) = f(\{a,c\}) = a, \\ f(\{a,d\}) = f(\{b,d\}) = d, \\ f(\{b,c\}) = f(\{c,d\}) = c. \end{aligned}$$

しかし選ばれるチャンスは 6 回なので, 4 個すべてが 2 回以上選ばれることはありえない.

選択関数 $f : \mathcal{Z} \to Y$ によって 2 回以上選出される Y_i のメンバーがいくつあるかによって, 添字集合 I を 3 分割しよう:

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

$$i \in I_k \iff f \text{ によって 2 回以上選出される } Y_i \text{ の}$$

$$\text{要素がちょうど } k \text{ 個ある}$$

$$(k = 1, 2, 3).$$

このとき, もともとの 4 元集合の族 $\{ Y_i \mid i \in I \}$ からの選択関数 $g \colon I \to Y$ を次のように与えることができる. まず $i \in I_1$ のときは f によって重複して選ばれるただひとつの Y_i の要素を $g(i)$ とする, $i \in I_3$ のときは f によって重複して選ばれないただひとつの Y_i の要素を $g(i)$ とする. 最後に I_2 上では, ふたたび仮定 C_2 により, f が重複して選択するちょうど 2 個の Y_i の要素のいずれかを選択することができるので, それを $g(i)$ とすればよい. (証明終)

♠ ♢ ♡ ♣

とまあ以上のような方針で証明したわけですが, ここで疑問に思うのは, たとえば添え字集合 I が可算集合で各 $i \in I$ に対して Y_i が 4 元集合, しかも互いに交わりなし, との仮定のもとで $\mathcal{Z} = \bigcup_{i \in I} [Y_i]^2$ なる 2 元集合族を考えたとして, これが可算族になる保証があるかどうか, ということです.

(2009 年 10 月 29 日未明, 藤田 “てなさく” 博司)